# Codifica dei Numeri

Informatica B

25 Ottobre 2017

Giacomo Boracchi

giacomo.boracchi@polimi.it

# Rappresentazione dei Numeri

# Codifica dei Numeri in Base 10

- Le cifre che abbiamo a disposizione sono 10
$$A_{10} = \{0, 1, \dots, 9\}$$
- Utilizziamo una **codifica posizionale**, quindi le cifre in posizioni differenti hanno un significato differente
- Es numero di 4 cifre
  - $\mathbf{3401} = \mathbf{3} \times 10^3 + \mathbf{4} \times 10^2 + \mathbf{0} \times 10^1 + \mathbf{1} \times 10^0$
- Con $m$ cifre posso rappresentare $10^m$ numeri distinti:
$$0, \dots, 10^m - 1$$

# Codifica dei Numeri in una Base Qualsiasi

- Ogni codifica ha un insieme di cifre (dizionario) $A$
  - In base 10, il dizionario è $A_{10} = \{0, \dots, 9\}$
- Un numero è una sequenza di cifre

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \text{ con } a_i \in A$$

  - 8522 è una sequenza di 4 cifre di $A_{10}$, $\{8,5,2\} \subset A_{10}$.
- Manteniamo un **codifica posizionale**: ogni cifra assume un significato diverso in base alla sua posizione nel numero.
  - $a_n$ è la cifra **più significativa**
  - $a_0$ è la cifra **meno significativa**

  *Es:* in **8522**, **8** è la cifra più significativa, **2** quella meno.

  8522 è diverso da 2852, 8252,… che pur contengono le stesse cifre

# Codifica dei Numeri: Notazione Posizionale

- Dato un numero $N_{10}$, in base 10 contenente $m$ cifre scritto come $a_{m-1}a_{m-2}\dots a_1a_0$ questo corrisponde a:

$$N_{10} = a_{m-1} \times 10^{m-1} + a_{m-2} \times 10^{m-2} + \dots + a_0 \times 10^0$$

$$(a_{m-1}a_{m-2}\dots a_1a_0)_{10} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 10^i \ , \qquad a_i \in A_{10}$$

*Es:* $(8522)_{10} = 8 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

- Con $m$ cifre in $A_{10}$ quanti numeri posso esprimere? $10^m$
- Considerando gli interi positivi, posso scrivere tutti numeri tra $[0, 10^m - 1]$
  - *Es:* $m = 1$ copro $[0,10 - 1]$ (cioè $[0,9]$ i.e., $A_{10}$)

    $m = 3$ copro $[0,10^3 - 1]$ (cioè $[0, 999]$)

# Rappresentazioni Posizionali in Base $p$

- Consideriamo **rappresentazioni posizionali in base $p$** (con $p > 0$) e chiamiamo $A_p$ il dizionario di $p$ cifre:
  - se $p \leq 10$ prendiamo le cifre di $A_{10}$, $A_p = \{0, \ldots, p-1\}$
  - se $p > 10$ aggiungiamo simboli $A_p = \{0, .., 9, A, B..\}$
- Un numero di $m$ cifre in base $p$:

$$N_p = a_{m-1} \times p^{m-1} + a_{m-2} \times p^{m-2} + .. + a_0 \times p^0$$

$$N_p = a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times p^i, \qquad a_i \in A_p$$

- Con $m$ cifre in $A_p$ quanti numeri posso esprimere: $p^m$
- Considerando gli interi positivi, posso scrivere tutti numeri tra $[0, p^m - 1]$

# Codifica dei numeri in base $p$: Esempi

*Es:* $m = 1$ e $p = 7$, copro $[0, 7 - 1]$ (cioè $[0,6]$)

$m = 4$ e $p = 7$, copro $[0, 7^4 - 1]$ (cioè $[0,2400]$)

$m = 1$ e $p = 13$, copro $[0, 13 - 1]$ (cioè $[0,12]$)

$m = 4$ e $p = 13$, copro $[0, 13^4 - 1]$ (cioè $[0,28560]$)

Al crescere di $p$ cresce il «potere espressivo» del dizionario (con lo stesso numero di cifre posso scrivere molti più numeri).

# Codifica dei Numeri in Base 2

- I calcolatori sono in grado di operare con informazioni **binarie**. Quindi $p = 2$ e $A_2 = \{0, 1\}$

$$N_2 = a_{m-1} \times 2^{m-1} + a_{m-2} \times 2^{m-2} + .. + a_0 \times 2^0$$

$$N_2 = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 2^i \ , \qquad a_i \in \{0,1\}$$

- Un bit (*binary digit*) assume valore 0/1 corrispondente ad un determinato *stato fisico* (alta o bassa tensione nella cella di memoria)
- Con $m$ bit posso scrivere $2^m$ numeri diversi, ad esempio tutti gli interi nell'intervallo $[0, 2^m - 1]$
- Il byte è una sequenza di 8 bit ed esprime $2^8 = 256$ numeri diversi (ad esempio gli interi in $[0,255]$)

00000000, 00000001, 00000010, …, 11111111

# Conversione Binario-Decimale

- È necessario imparare le potenze di 2!

| $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ | $2^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

- E i loro legami con l'informatica:
  - Byte = 8 bit
  - KiloByte (kB) = $10^3$ Byte
  - MegaByte (MB) = $10^6$ Byte
  - GigaByte (GB) = $10^9$ Byte
  - TheraByte (TB) = $10^{12}$ Byte

# Altre Codifiche che consideriamo

- Codifica **ottale** (in **base 8**)
  - $A_8 = \{0, 1, \dots, 7\}$
  - con $m$ cifre in $A_8$ scrivo i numeri da $[0, 8^m - 1]$

- Codifica **esadecimale**, (in **base 16**)
  - $A_{16} = \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$,
  - Per le conversioni $A = 10$, …, $F = 15$.
  - con $m$ cifre in $A_{16}$ scrivo i numeri da $[0,16^m - 1]$.

# Conversione Binario-Decimale

Utilizziamo la definizione di numero in notazione posizionale

$$N_2 = a_{m-1} \times 2^{m-1} + a_{m-2} \times 2^{m-2} + .. + a_0 \times 2^0$$

*Es.*

$$(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (5)_{10}$$

$$(1100010)_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2 = (98)_{10}$$

# Osservazioni

- In binario i numeri che terminano con 1 sono dispari, quelli con 0 sono pari.
  - L'unico modo per avere un numero dispari nella somma è aggiungere $2^0 = 1$
- Le conversioni di numeri con bit tutti a 1 si calcolano facilmente

$$(111111)_2 = (1000000)_2 - (1)_2 = 2^6 - 1 =$$

# Conversione Decimale ➡ Binario

- Metodo delle divisioni successive:
- Per convertire 531 opero come segue:
  - 531 / 2 = 265 + 1
  - 265 / 2 = 132 + 1
  - 132 / 2 = 66 + 0
  - 66 / 2 = 33 + 0
  - 33 / 2 = 16 + 1
  - 16 / 2 = 8 + 0
  - 8 / 2 = 4 + 0
  - 4 / 2 = 2 + 0
  - 2 / 2 = 1 + 0
  - 1 / 2 = 0 + 1

Divisione intera tra il numero e 2

Il risultato della divisione precedente viene successivamente diviso

Si continua fino a quando il risultato della divisione non diventa o (e considero comunque il resto!)

# Conversione Decimale ➡ Binario

- Metodo delle divisioni successive:
- Per convertire 531 opero come segue:
  - 531 / 2 = 265 + 1
  - 265 / 2 = 132 + 1
  - 132 / 2 = 66 + 0
  - 66 / 2 = 33 + 0
  - 33 / 2 = 16 + 1
  - 16 / 2 = 8 + 0
  - 8 / 2 = 4 + 0
  - 4 / 2 = 2 + 0
  - 2 / 2 = 1 + 0
  - 1 / 2 = 0 + 1

⇨ Cifra meno significativa

I resti della divisione intera, letti dall'ultimo al primo, identificano il numero binario

$$(531)_{10} = (1000010011)_2$$

⇨ Cifra più significativa

# Algoritmo per convertire da base 10 a base 2

Assumiamo di scrivere il numero binario in un'opportuna struttura dati: un array!

1. Sia $n$ il numero da convertire da base 10 a base 2
2. Se $n = 0$ oppure $n = 1$ , allora $n$ è già in base 2

Altrimenti

3. Salva il resto della divisione tra $n$ e 2 in una cella di un array
4. Associa ad $n$ la divisione intera tra $n$ e 2
5. Ripeti 3 – 4 fino a quando $n == 0$
6. Leggi l'array al contrario per ottenere $n$ in base 2

# TODO: Conversione Decimale ➡ Binario

- Scrivere un programma che esegue la conversione decimale binario e salva il risultato in un'opportuna struttura dati prima di visualizzarlo
- Modificare il programma convertire da decimale ad una base $p$ qualunque con $p \leq 16$ specificata dall'utente durante l'esecuzione del programma.
- **NB:** l'algoritmo delle divisioni successive vale rispetto a qualunque base
- **NB**: controllare che il numero inserito sia compatibile con il numero massimo di bit allocati

# Conversioni ottale/esadecimale ➡ decimale

- È possibile utilizzare le definizioni precedenti per convertire da ottale/esadecimale in base 10

$$N_{16} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 16^i \ , \qquad a_i \in A_{16}$$

- *Es:* $(31)_8 =$
- $(A170)_{16} =$

  $=$
- $(623)_8 =$

  $=$
- $(623)_{16} =$

  $=$

# Conversioni ottale/esadecimale ➡ decimale

- È possibile utilizzare le definizioni precedenti per convertire da ottale/esadecimale in base 10

$$N_{16} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 16^i \ , \qquad a_i \in A_{16}$$

- *Es:* $(31)_8 = 3 * 8 + 1 = (25)_{10}$
- $(A170)_{16} =$

  $=$
- $(623)_8 =$

  $=$
- $(623)_{16} =$

  $=$

# Conversioni ottale/esadecimale ➡ decimale

- È possibile utilizzare le definizioni precedenti per convertire da ottale/esadecimale in base 10

$$N_{16} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 16^i \ , \qquad a_i \in A_{16}$$

- *Es:* $(31)_8 = 3 * 8 + 1 = (25)_{10}$
- $(A170)_{16} = A * 16^3 + 1 * 16^2 + 7 * 16$
  $= 10 * 4096 + 1 * 256 + 7 * 16 = (41328)_{10}$
- $(623)_8 =$

  $=$
- $(623)_{16} =$

  $=$

# Conversioni ottale/esadecimale ➡ decimale

- È possibile utilizzare le definizioni precedenti per convertire da ottale/esadecimale in base 10

$$N_{16} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 16^i \ , \qquad a_i \in A_{16}$$

- *Es:* $(31)_8 = 3 * 8 + 1 = (25)_{10}$
- $(A170)_{16} = A * 16^3 + 1 * 16^2 + 7 * 16$
  $= 10 * 4096 + 1 * 256 + 7 * 16 = (41328)_{10}$
- $(623)_8 = 6 * 8^2 + 2 * 8 + 3 * 8^0$
  $= 6 * 64 + 16 + 3 = (403)_{10}$
- $(623)_{16} =$
  $=$

# Conversioni ottale/esadecimale ➡ decimale

- È possibile utilizzare le definizioni precedenti per convertire da ottale/esadecimale in base 10

$$N_{16} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \times 16^i \ , \qquad a_i \in A_{16}$$

- *Es:* $(31)_8 = 3 * 8 + 1 = (25)_{10}$
- $(A170)_{16} = A * 16^3 + 1 * 16^2 + 7 * 16$
  $= 10 * 4096 + 1 * 256 + 7 * 16 = (41328)_{10}$
- $(623)_8 = 6 * 8^2 + 2 * 8 + 3 * 8^0$
  $= 6 * 64 + 16 + 3 = (403)_{10}$
- $(623)_{16} = 6 * 16^2 + 2 * 16 + 3 * 16^0$
  $= 6 * 256 + 32 + 3 = (1571)_{10}$

# Conversioni decimale ➡ ottale/esadecimale

- È possibile utilizzare l'algoritmo delle divisioni successive

- È tuttavia più comodo fare delle conversioni passando dalla rappresentazione binaria e
  - Esprimere ogni sequenza di 3 numeri binari in base 8
  - $(1231)_{10} = (10011001111)_2 = (\underbrace{010}\ \underbrace{011}\ \underbrace{001}\ \underbrace{111})_2$
  - $(1231)_{10} = (2317)_8$ $\qquad (2 \quad 3 \quad 1 \quad 7)_8$

  - Esprimere ogni sequenza di 4 numeri binari in base 16
  - $(1231)_{10} = (10011001111)_2 = (\underbrace{0100}\ \underbrace{1100}\ \underbrace{1111})_2$
  - $(1231)_{10} = (4CF)_{16}$ $\qquad (4 \quad C \quad F)_{16}$

# Somma tra Numeri Binari

- Si eseguono «in colonna» e si opera cifra per cifra
- Si considera il riporto come per i decimali
  - 0 + 0 = 0 riporto 0
  - 1 + 0 = 1 riporto 0
  - 0 + 1 = 1 riporto 0
  - 1 + 1 = 0 riporto 1
- Occorre sommare il riporto della cifra precedente

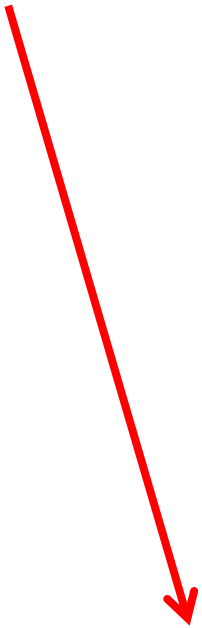
$$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ \mathbf{0101} + \\ \mathbf{1001} = \\ \hline \mathbf{1110} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ (5)_{10} \\ (9)_{10} \\ \\ (14)_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{111} \\ \mathbf{1111} + \\ \mathbf{1010} = \\ \hline (\mathbf{1})\mathbf{1001} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ (15)_{10} \\ (10)_{10} \\ \\ (25)_{10} \end{array}$$

Riporto

# Somma tra Numeri Binari

- A volte i bit utilizzati per codificare gli addendi non bastano a contenere il risultato
  - In questi casi occorrono più bit per codificare il risultato
  - Si ha quindi un bit di **carry**



$$\begin{array}{r} \color{red}{1} \\ \mathbf{0101} + (5)_{10} \\ \mathbf{1001} = (9)_{10} \\ \hline \mathbf{1110} \quad (14)_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \color{red}{111} \\ \mathbf{1111} + (15)_{10} \\ \mathbf{1010} = (10)_{10} \\ \hline \color{red}{(1)}\mathbf{1001} \quad (25)_{10} \end{array}$$

# I numeri Interi

- Positivi e Negativi

# Rappresentazione Modulo e Segno

- È possibile dedicare **il primo bit** alla codifica del **segno**
  - `"1"` il numero che segue è negativo
  - `"0"` il numero che segue è positivo

- Con $m$ cifre in binario e codifica modulo dedico $2^{m-1}$ per i positivi e $2^{m-1}$ per gli stessi cambiati di segno
  - posso rappresentare tutti i numeri nell'intervallo

$$X \in [-2^{m-1}+1, 2^{m-1}-1]$$

- Es
  - `01010 = + 10`
  - `11101 = - 13`
  - `-27 = 111011`
  - `122 = 01111010`

# Rappresentazione Modulo e Segno

- Esempio $m = 3$
  - 0 = 000
  - 1 = 001
  - 2 = 010
  - 3 = 011
  - -0 = 100
  - -1 = 101
  - -2 = 110
  - -3 = 111

**Ho due codifiche differenti lo zero**

- C'è uno «spreco» nella codifica
- Ostacola realizzazione circuitale delle operazioni algebriche (non lo mostriamo)
- Occorre trovare una rappresentazione migliore!

# Rappresentazione in Complemento a 2 (CP2)

- Date $m$ cifre binarie, disponibili $2^m$ configurazioni distinte
- In CP2 se ne usano:
  - $2^{m-1} - 1$ per valori positivi
  - $1$ per lo zero
  - $2^{m-1}$ per i valori negativi
- Con $m$ bit rappresento l'intervallo $[-2^{m-1}, 2^{m-1} - 1]$

# Rappresentazione in Complemento a 2 (CP2)

- Sia $X \in [-2^{m-1}, 2^{m-1}-1]$ il numero da rappresentare in CP2, con $m$ bit.
  - se $X$ è **positivo** o nullo **scrivo $\boldsymbol{X}$** in binario con **$\boldsymbol{m}$ bit**
  - se $X$ è **negativo scrivo $\boldsymbol{2^m - |X|}$** in binario con **$\boldsymbol{m}$ bit**
- Questo equivale alla seguente codifica:

$$N_{CP2} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0$$

$$= -a_{m-1} \times 2^{m-1} + a_{m-2} \times 2^{m-2} + \dots + a_0 \times 2^0$$

$$= -a_{m-1} \times 2^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} a_i \times 2^i \ , \qquad a_i \in \{0,1\}$$

# Rappresentazione in Complemento a 2 (CP2)

- Sia $X \in [-2^{m-1}, 2^{m-1}-1]$ il numero da rappresentare in CP2, con $m$ bit.
  - se $X$ è **positivo** o nullo **scrivo $\boldsymbol{X}$** in binario con **$\boldsymbol{m}$ bit**
  - se $X$ è **negativo scrivo $\boldsymbol{2^m - |X|}$** in binario con **$\boldsymbol{m}$ bit**

- Questo equivale alla seguente codifica:

$$N_{CP2} = a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0$$

$$= \boxed{-a_{m-1}\times 2^{m-1}} + a_{m-2}\times 2^{m-2} + \ldots + a_0 \times 2^0$$

$$= \boxed{-a_{m-1}\times 2^{m-1}} + \sum_{i=0}^{m-2} a_i \times 2^i \ , \qquad a_i \in \{0,1\}$$

i.e., viene cambiato il segno dell'addendo relativo alla cifra più significativa

# Rappresentazione in CP2

- Esempio $m = 3$
  - -4 =
  - -3 =
  - -2 =
  - -1 =
  - 0 =
  - 1 =
  - 2 =
  - 3 =

# Rappresentazione in CP2

- Esempio $m = 3$
  - `-4 = 100`
  - `-3 = 101`
  - `-2 = 110`
  - `-1 = 111`
  - `0 = 000`
  - `1 = 001`
  - `2 = 010`
  - `3 = 011`

# Rappresentazione in CP2

- Con i positivi copro solo il range $[0, 2^{m-1}-1]$, quindi la prima cifra è 0 (il numero è minore di $2^{m-1}$)
- Con i negativi copro il range $[-2^{m-1}, -1]$ e scrivo $2^m - |X|$, e quindi la prima cifra è 1 (il numero è maggiore di $2^{m-1}$)
- Quindi, il primo bit **indica il segno** del numero
  - Attenzione: questo numero **non è il segno**: **cambiandolo non** si ottiene il **numero opposto**
  - $45 = (0101101)_{CP2}$ se cambio di segno alla prima cifra
  - $(1101101)_{CP2} \rightarrow -2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 1 = \\ = -64 + 45 = -19$
- Inoltre, un solo valore per lo 0 (cioè $m$ volte 0), nessuna configurazione "sprecata" dalla codifica

# Rappresentazione in CP2

- *Es, definire un intervallo che contenga -23 e 45*

# Rappresentazione in CP2

- *Es, definire un intervallo che contenga -23 e 45*
  - $m = 7$, copro $[-2^6, 2^6 - 1] = [-64, 63]$
  - ~~$m = 6$, copro $[-2^5, 2^5 - 1] = [-32, 32]$~~ (non cont. 45)
  - $-23 \rightarrow 2^7 - 23 = 128 - 23 = 105 = (1101001)_{CP2}$
  - $45 = (0101101)_{CP2}$
- **NB:** occorre utilizzare **sempre $m$ bit**. Se non avessi messo lo 0 iniziale in $(45)_{CP2}$ avrei ottenuto un numero negativo a 6 bit!

# Conversione Decimale ➡ CP2

Metodo "operativo" per rappresentare $X$ ad $m$ bit

1. Controllo che $X \in [-2^{m-1}, 2^{m-1} - 1]$, altrimenti $m$ bit non bastano
2. Se $X$ è positivo, scrivo $X$ utilizzando $m$ bit
   **NB:** ricordandosi di aggiungerei zeri se necessario all'inizio del numero!
3. Se $X$ è negativo:
   a) Scrivo $|X|$ utilizzando $m$ bit
   b) **Complemento** tutti i bit di $X$ $(1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1)$
   c) **Sommo 1** al numero ottenuto

# Esempi Conversione Decimale ➡ CP2

Esempio: scrivere -56 in CP2 con il numero di bit necessari

# Esempi Conversione Decimale ➡ CP2

Esempio: scrivere -56 in CP2 con il numero di bit necessari

i. $m = 7$ copre $[-2^6, 2^6 - 1] = [-64, 63]$

ii. Scrivo $(56)_{10} \rightarrow 0111000$

iii. Complemento $\rightarrow 1000111$

iv. Sommo 1 $\quad 1$

v. $(1001000)_{CP2} = (-56)_{10}$

| | |
|---|---|
| 56 | 0 |
| 28 | 0 |
| 14 | 0 |
| 7 | 1 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | |

# Esercizi

Esercizio: convertire in complemento a 2 i seguenti numeri, utilizzando il numero di bit necessario per esprimerli tutti

$$
\begin{aligned}
(12)_{10} &= \\
(-12)_{10} &= \\
(-8)_{10} &= \\
(1)_{10} &= \\
(-101)_{10} &= \\
(-54)_{10} &=
\end{aligned}
$$

# Esercizi

Esercizio: convertire in complemento a 2 i seguenti numeri, utilizzando il numero di bit necessario per esprimerli tutti

$$
\begin{aligned}
(12)_{10} &= (0000\ 1100)_{CP2} \\
(-12)_{10} &= (1111\ 0100)_{CP2} \\
(-8)_{10} &= (1111\ 1000)_{CP2} \\
(1)_{10} &= (0000\ 0001)_{CP2} \\
(-101)_{10} &= (1001\ 1011)_{CP2} \\
(-54)_{10} &= (1100\ 1010)_{CP2}
\end{aligned}
$$

# Conversione CP2 ➡ Decimale

Possiamo utilizzare la definizione

$$N_{CP2} = a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0$$

$$= -a_{m-1} \times 2^{m-1} + a_{m-2} \times 2^{m-2} + \dots + a_0 \times 2^0$$

$$= -a_{m-1} \times 2^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} a_i \times 2^i \ , \qquad a_i \in \{0,1\}$$

$$Es\ (1001000)_{CP2} = -2^6 + 2^3 = -64 + 8 = (-56)_{10}$$

$$(10011011)_{CP2} = -2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 =$$

$$= -128 + 16 + 8 + 2 + 1 = (-101)_{10}$$

**NB** convertite sempre in decimale con questo metodo per controllare le vostre operazioni

# Conversione CP2 ➡ Decimale

… in alternativa è possibile utilizzare un metodo operativo:

1. Se $(X)_{CP2}$ inizia per $0$, allora è positivo: lo converto normalmente
2. Se $(X)_{CP2}$ inizia per $1$, allora è negativo
   a) **Complemento** tutti i bit di $(X)_{CP2}$ $(1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1)$
   b) **Sommo 1** al numero ottenuto
   c) **Converto** in decimale e cambio di segno

# Esempio

Esercizio: riconvertire in decimale i seguenti numeri in complemento a 2

$(1001010)_{CP2} \rightarrow (0110101) \rightarrow (0110110) \rightarrow (-54)_{10}$

$(1001010)_{CP2} = -2^6 + 2^3 + 2^1 = -64 + 8 + 2 = -54$

$(011)_{CP2}$

$(1101001)_{CP2}$

$(11111)_{CP2}$

$(10100)_{CP2}$

$(101)_{CP2}$

# Somma tra Numeri in CP2

- In CP2 l'operazione di somma si realizza **come nella rappresentazione binaria posizionale**
- Grazie alla rappresentazione in CP2 **è possibile eseguire** anche **sottrazioni** tra numeri binari con lo stesso meccanismo (i.e., somme tra interi di segno opposto)

# Carry e Overflow in CP2

- In CP2 occorre **ignorare il bit di carry**, cioè il riporto che cade sul bit di segno
- In CP2 occorre individuare **l'overflow**, i.e., casi in cui il risultato è fuori dall'intervallo rappresentabile con i bit utilizzati.
- Quando c'è **overflow il risultato è inconsistente** con gli addendi:
  - Somma di due addendi positivi da un numero negativo
  - Somma di due addendi negativi da un numero positivo
- **NB** non può esserci overflow quando sommo due numeri di segno opposto

# Esempio no overflow

*Esempio:* $60 - 54$

diventa $60 + (-54)$

$$\begin{array}{rcl} & & \phantom{(}1\ 1\ 1\ 1 \\ (60)_{10} & = & (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)_{CP2} \\ (-54)_{10} & = & \underline{(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)_{CP2}} \\ & & (1)\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

Il riporto (carry) viene ignorato

Quando sommo numeri di segno opposto non può esserci overflow

Il risultato è positivo $(0000110)_{CP2} = (6)_{10}$

# Esempio

Esempio: $(100)_{CP2} + (101)_{CP2}$

```
      1
    1 0 0 +
    1 0 1 =
-------------
[1] (1) 0 0 1
```

- Ignoro il bit di carry
- **Overflow:** la somma di due numeri negativi mi ha dato un numero positivo.
- L'overflow si indica quadre: [1] c'è overflow, [0] non c'è
- Il risultato non ha senso, occorre scrivere gli addendi con un bit in più per rappresentare il risultato dell'operazione

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>
-4  =>
-7  =>
```

```
-3  =>
+6  =>
+3  =>
```

```
-3  =>
-7  =>
-10 =>
```

```
+2  =>
+5  =>
+7  =>
```

```
+3  =>
+6  =>
+9  =>
```

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>          1101
-4  =>          1100
-7  =>  [0] (1)1001
```

```
-3  =>
+6  =>
+3  =>
```

```
-3  =>
-7  =>
-10 =>
```

```
+2  =>
+5  =>
+7  =>
```

```
+3  =>
+6  =>
+9  =>
```

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>          1101
-4  =>          1100
-7  =>  [0] (1)1001
```

```
-3  =>           1101
+6  =>           0110
+3  =>  [0]  (1)0011
```

```
-3  =>
-7  =>
-10 =>
```

```
+2  =>
+5  =>
+7  =>
```

```
+3  =>
+6  =>
+9  =>
```

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>          1101
-4  =>          1100
-7  =>  [0] (1)1001
```

```
-3  =>          1101
+6  =>          0110
+3  =>  [0]  (1)0011
```

```
-3  =>          1101
-7  =>          1001
-10 =>  [1](1)  0110
```

```
+2  =>
+5  =>
+7  =>
```

```
+3  =>
+6  =>
+9  =>
```

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>          1101
-4  =>          1100
-7  =>  [0] (1)1001
```

```
-3  =>           1101
+6  =>           0110
+3  =>  [0]  (1)0011
```

```
-3  =>          1101
-7  =>          1001
-10 =>  [1](1)  0110
```

```
+2  =>          0010
+5  =>          0101
+7  =>  [0](0)  0111
```

```
+3  =>
+6  =>
+9  =>
```

# Esempi

- Esempi: con $m = 4$ bit
- Indico tra () bit di carry, tra [] bit di overflow

```
-3  =>          1101
-4  =>          1100
-7  =>  [0] (1)1001
```

```
-3  =>          1101
+6  =>          0110
+3  =>  [0]  (1)0011
```

```
-3  =>          1101
-7  =>          1001
-10 =>  [1](1)  0110
```

```
+2  =>          0010
+5  =>          0101
+7  =>  [0](0)  0111
```

```
+3  =>          0011
+6  =>          0110
+9  =>  [1](0)  1001
```

# Esercizio TODO

Scrivere un programma per eseguire la trasformazione in CP2 di un intero $n$ inserito dall'utente. In particolare il programma

- Richiede $n$ controllando che questo sia compabile con il nr di bit massimo allocate per rappresentare il numero in un vettore (dimensioni reali)
- Determina $m$, il nr di bit necessary a rappresentare $n$
- Trasforma $n$ in CP2 utilizzando
  - La definizione di codifica in CP2
  - Il metodo operative
- Stampa il numero in CP2
- Ri-converte in base 10 e controlla che la rappresentazoine sia corretta (usare sia la definizione che il metodo operativo)

# Nota in C

- Le variabili **int** sono codificate in CP2
- Se aggiungo il qualificatore **unsigned** , tutti i bit vengono usati solo per i numeri positivi. Posso coprire un range maggiore
- Provare per credere…

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
void main()
{
int u;
u = -1;
printf("%u", u);
printf("\n%u", 2 * INT_MAX + 1);
}
```

# Nota in C

- Le variabili **`int`** sono codificate in CP2
- Se aggiungo il qualificatore **`unsigned`** , tutti i bit vengono usati solo per i numeri positivi. Posso coprire un range maggiore
- Provare per credere…

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
void main()
{
int u;
u = -1;
printf("%u", u);
printf("\n%u", 2 * INT_MAX + 1);
}
```

-1 in CP2 viene scritto come una sequenza di 1. Quando accedo alla cella come uint, leggo il contenuto in codifica binaria normale. Quinidi 1111…1 viene letto come il massimo numero racchiudibile in un unsigned

# Nota in C

- Le variabili **`int`** sono codificate in CP2
- Se aggiungo il qualificatore **`unsigned`** , tutti i bit vengono usati solo per i numeri positivi. Posso coprire un range maggiore
- Provare per credere…

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
void main()
{
int u;
u = -1;
printf("%u", u);
printf("\n%u", 2 * INT_MAX + 1);
}
```

che corrisponde a questo (INT_MAX è il massimo intero, considerando quindi anche i negativi, quindi con gli unsigned posso andare oltre!)

# Nota in C

- Le variabili **int** sono codificate in CP2
- Se aggiungo il qualificatore **unsigned** , tutti i bit vengono usati solo per i numeri positivi. Posso coprire un range maggiore
- Provare per credere…

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
void main()
{
int u;
u = -1;
printf("%u", u);
printf("\n%u", 2 * INT_MAX + 1);
}
```

…. motivo in più per evitare unsigned ove possibile

# Esempio TDE 11/2009

a) Si dica qual è l'intervallo di valori interi rappresentabile con la codifica in complemento a due a 9 bit.

b) Con riferimento a tale codifica indicare, giustificando brevemente le risposte, quali delle seguenti operazioni possono essere effettuate correttamente:
   i. -254 – 255
   ii. + 254 – 253
   iii. -18 + 236
   iv. + 217 + 182

c) Mostrare in dettaglio come avviene il calcolo delle operazioni (i) e (ii), evidenziando il bit di riporto e il bit di overflow così ottenuti. (Il bit di overflow è pari ad 1 se si verifica overflow, o altrimenti.)

# Esempio TDE 11/2009

a. Valori rappresentabili vanno da -256 a +255.

b. Le soluzioni:

   i. -254 – 255: NO, si ottiene un valore negativo troppo grande in valore assoluto

   ii. + 254 – 253: SI, si ottiene un valore piccolo in valore assoluto

   iii. -18 + 236: SI, si ottiene un valore positivo, grande in valore assoluto ma nei limiti

   iv. + 217 + 182: NO, si ottiene un valore positivo troppo grande in valore assoluto

c.

```
100000010 (-254)
100000001 (-255)
-----------------
[1](1)000000011 (-509)
```

```
011111110 (+254)
100000011 (-253)
-----------------
[0](1)000000001 (+1)
```

# Esercizio TODO

Scrivere un programma che prende in ingresso un numero $n$ e

- Indica il nr di bit necessari per rappresentare $n$ in CP2
- Qualora il nr di bit fosse superiore alla dimensione dell'array allocato, segnala un errore
- Trasforma il numero in CP2 indicando

# TDE 11/2011

1. Si fornisca la codifica binaria $CP_2$ del numero -221 utilizzando il minor numero di bit necessari per una corretta rappresentazione
2. Si fornisca la codifica binaria in virgola mobile secondo lo standard IEEE 754-19[illegible] precisi[illegible]ingola del numero -221.0625
3. Si dica, giustificando [illegible]sposta, [illegible]a rappresentazione fornita al punto 2 è esatta oppure comporta qualche approssimazione

# Punto 1, rappresentazione in $CP_2$ di -221

221 richiede 9 bit perchè così copro $[-2^8, 2^8 + 1]$ con 8 bit copro solamente $[-2^7, 2^7 + 1]$. Quindi codifico 221

| | |
|---|---|
| 221 | 1 |
| 110 | 0 |
| 55 | 1 |
| 27 | 1 |
| 13 | 1 |
| 6 | 0 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | |