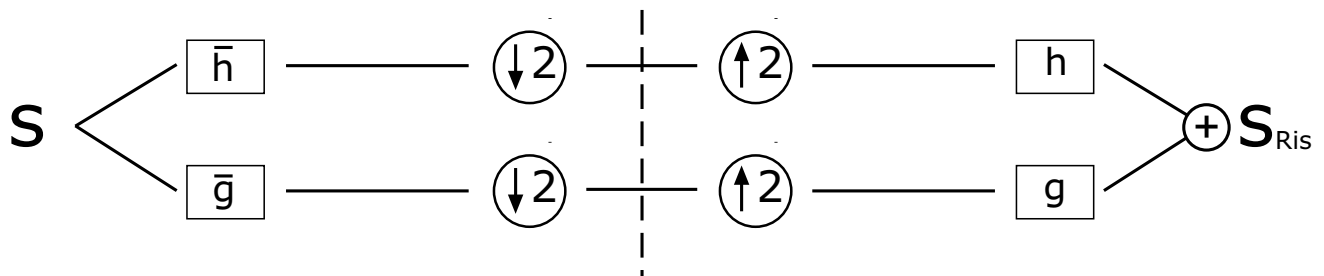


# Fondamenti Matematici della Codifica in Sottobande

- Codifica in Sottobande
- MRA, Ondine Ortonormali
- Compressione di Segnali
- Ondine e Filtri Biortogonali
- Schema di Lifting
- Lifting Opzionale

# Codifica in Sottobande con CMF



**Teo RICOSTRUZIONE PERFETTA**  
(Mallat, 1987)

$\{h[n]\}_n$  filtro FIR  $\hat{h}(\omega) = \sum_n h[n]e^{-in\omega}$

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 1$$

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}$$

Formula di scomposizione

$$a_j[p] = \sum_n h[n - 2p]a_{j+1}[n]$$

$$d_j[p] = \sum_n g[n - 2p]a_{j+1}[n]$$

Formula di ricostruzione

$$a_{j+1}[p] = \sum_n h[p - 2n]a_j[n] + \sum_n g[p - 2n]d_j[n]$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_1^{\infty} \hat{h}(2^{-p}\omega)$$

- $h$  FIR  $\Rightarrow \phi \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp}(\phi)$  compatto
- Se  $h$  passa basso  $\Rightarrow \phi$  funzione di scala o.n.

$$\phi_j(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x) \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}$$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$$

$$V_j \doteq \langle \phi_{j,k} \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

Allora  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , chiusi tali che

- $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
- $\forall f \in L^2 \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- $\bigcap V_j = \{0\} \quad \bigcup V_j$  denso in  $L^2$
- $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è b.o.n. di  $V_0$

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  **Analisi Multirisoluzione (MRA)**

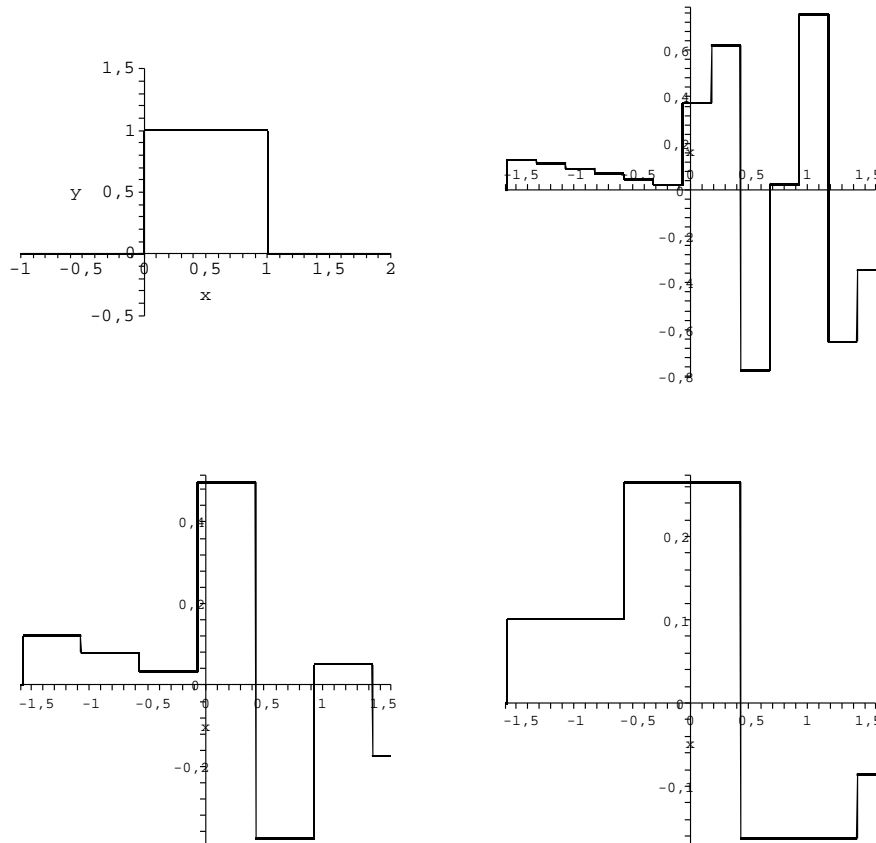
Ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ .

- Allora  $a_j[k] \doteq \langle f, \phi_{j,k} \rangle$

## Esempio MRA di Haar

$$\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$$

$$V_j = \{f \text{ costanti su intervalli di ampiezza } 2^{-j}\}$$



$$h = [1/2, 1/2] \quad g = [1/2, -1/2]$$

$$a_j[n] = \frac{a_{j+1}[n] + a_{j+1}[n+1]}{2}$$

$$d_j[n] = \frac{a_{j+1}[n] - a_{j+1}[n+1]}{2}$$

## Teo ONDINE ASSOCIATE AD UNA MRA (Mallat, Meyer)

Sia una MRA:  $\phi, h$

Posto  $\Psi$  t.c  $\widehat{\Psi}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega)$

dove  $\widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{h}(\omega + \pi)}$

Allora  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  è una b.o.n di  $L^2(\mathbb{R})$

$$W_j \doteq \langle \psi_{j,k} \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

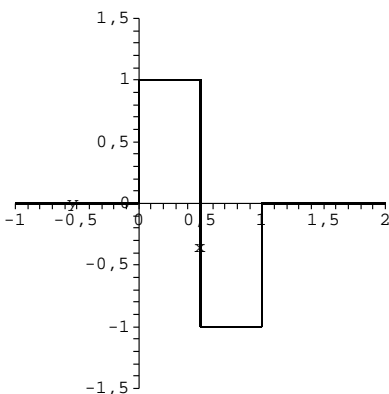
- $W_j$  complemento ortogonale di  $V_j$  in  $V_{j+1}$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

- $d_j[k] \doteq \langle f, \psi_{j,k} \rangle$

$$P_J(f) = P_0(f) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_k d_j[k] \psi_{j,k}$$

### Esempi 1) Ondina di Haar

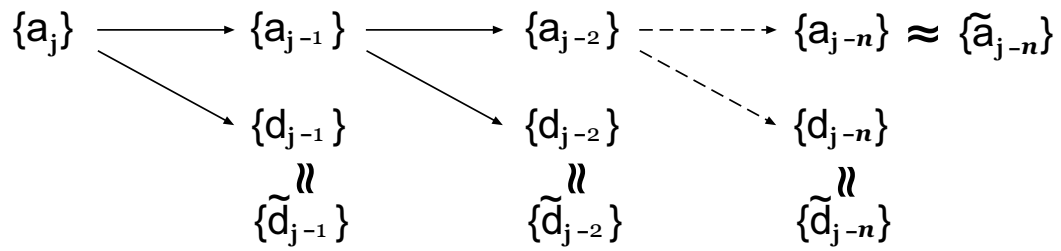


### 2) Filtro D4

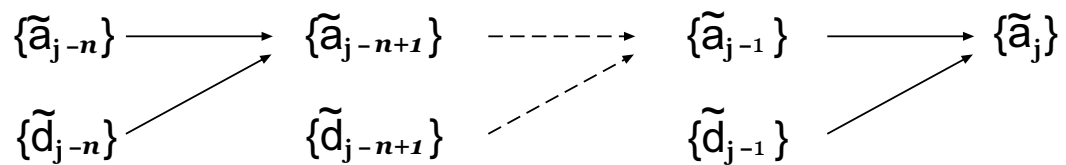
$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

# Compressione

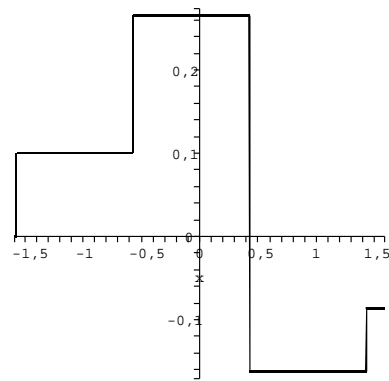
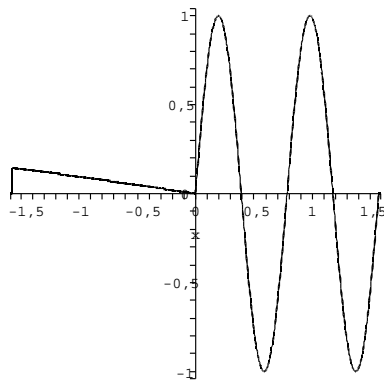


Scomposizione



Ricostruzione

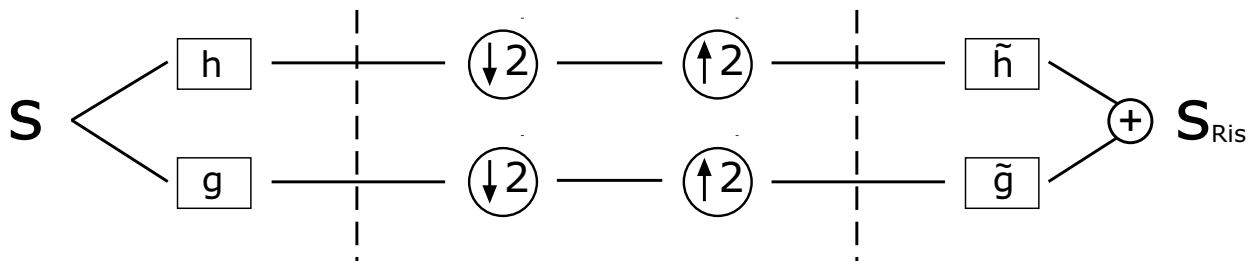
- Senza approx Ricostruzione Perfetta



- Approssimando al millesimo

Filtro	Percentuale
Haar	55.41
D4	23.23

## Codifica con filtri qualsiasi



**Teo** c.n.s per la ricostruzione perfetta  
(Vetterli)

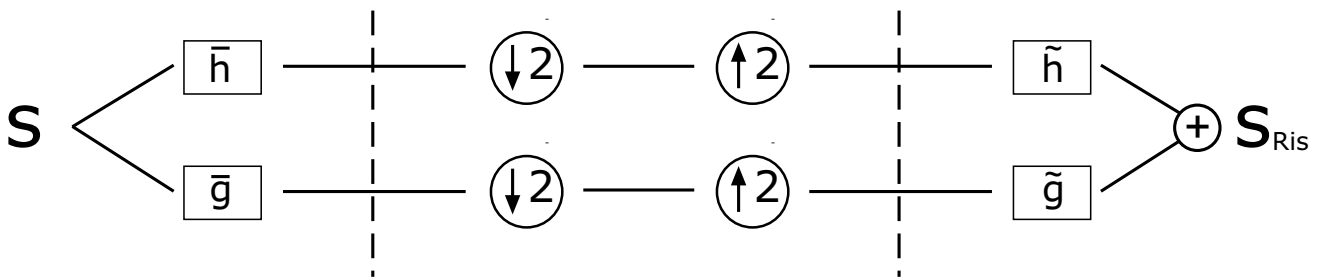
$$\begin{cases} \hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{h}(\omega) + \hat{\tilde{g}}(\omega)\hat{g}(\omega) = 1 \\ \hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{h}(\omega + \pi) + \hat{\tilde{g}}(\omega)\hat{g}(\omega + \pi) = 0 \end{cases} .$$

- . MRA associate?
- . basi associate?

## Filtri biortogonali (Cohen, 1992)

$$\overline{\widehat{h}(\omega)} \widehat{h}(\omega) + \overline{\widehat{h}(\omega + \pi)} \widehat{h}(\omega + \pi) = 1$$

$$\text{posto } \begin{cases} \widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\widehat{h}(\omega + \pi)} \\ \widetilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \widehat{h}(\omega + \pi) \end{cases},$$



$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_1^{\infty} h(2^{-p}\omega) \quad e \quad \widetilde{\phi}(\omega) = \prod_1^{\infty} \widetilde{h}(2^{-p}\omega)$$

sono funzioni di scala di opportune MRA

$$V_j \doteq \langle \phi_{j,k} \rangle_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \widetilde{V}_j \doteq \langle \widetilde{\phi}_{j,k} \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

. Si perde l'ortonormalità



## Ondine Associate

$$\widehat{\Psi}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega) \quad e \quad \widetilde{\widehat{\Psi}}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega)$$

- $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  e  $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  basi di  $L^2$

$$W_j \doteq \langle \psi_{j,k} \rangle_{k \in Z}, \quad \widetilde{W}_j \doteq \langle \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle_{k \in Z}$$

$$\forall j \in Z \quad V_j \perp \widetilde{W}_j \quad e \quad W_j \perp \widetilde{V}_j$$

- $\langle \widetilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \quad \forall j, k, j', k' \in Z$

- $\forall f \in L^2(\mathcal{R})$

$$f = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \widetilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} \langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

- $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  e  $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  **Basi Biortogonali**

## Vantaggi

- $f = \sum \sum \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}$
- Differenti proprietà MRA primale e duale
  - Numero momenti nulli
  - Regolarità
  - Semplicità
- Gradi di libertà

Filtri biortogonali  $\Leftrightarrow$  MRA, Basi Biortogonali

## Questioni

- Unicità della costruzione?
- Determinare i filtri

## Lo Schema di Lifting in $L^2$

**Prop LIFTING** (Sweldens, 1995)

$\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$  filtri FIR biortogonali

$s(\omega), t(\omega)$  polinomi trigonometrici qualunque

Un **Lifting** di coefficienti  $s(\omega)$

$$\tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}^0(\omega)\overline{s(2\omega)}$$

$$g(\omega) = g^0(\omega) - h^0(\omega)s(2\omega)$$

produce  $\{h^0, \tilde{h}, g, \tilde{g}^0\}$  filtri biortogonali

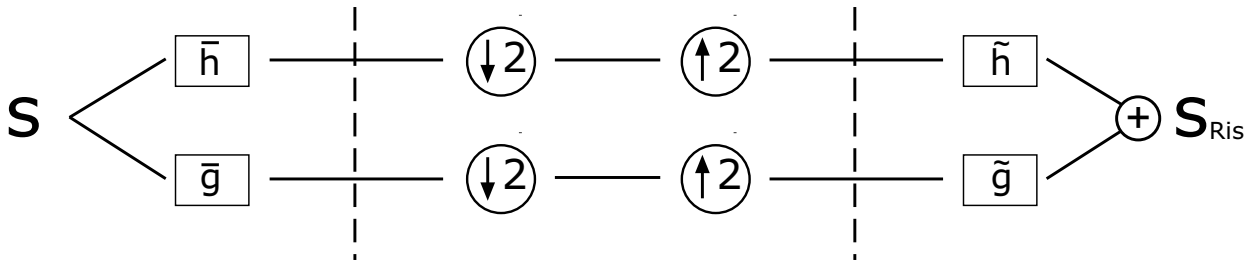
Un **Lifting Duale** di coefficienti  $t(\omega)$

$$h(\omega) = h^0(\omega) + \tilde{g}(\omega)\overline{t(2\omega)}$$

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{g}^0(\omega) - \tilde{h}(\omega)t(2\omega)$$

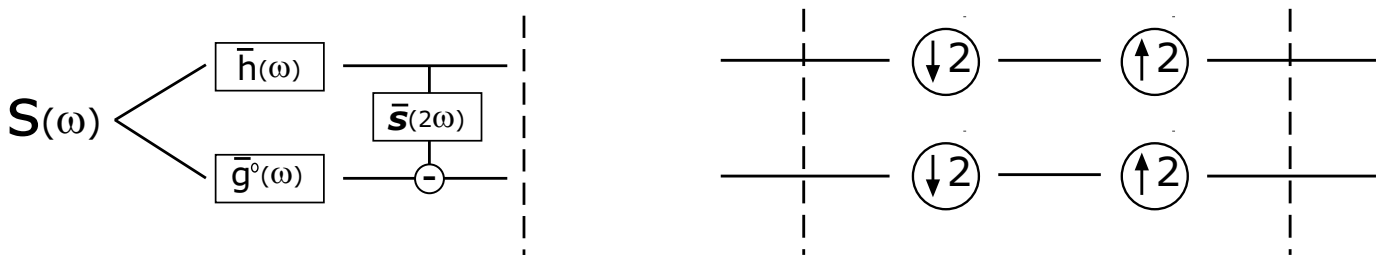
produce  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$  filtri biortogonali

# Codifica con filtri modificati da Lifting primale



$$S_2(\omega) = S(\omega) [\overline{g^0(\omega)} - \overline{h(\omega)} \overline{s(2\omega)}]$$

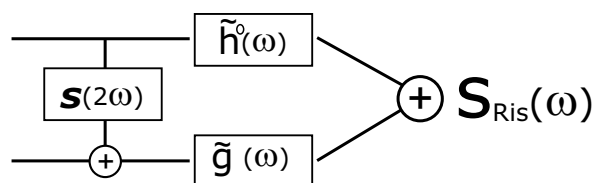
$$= S(\omega) \overline{g^0(\omega)} - S_1(\omega) \overline{s(2\omega)}$$



$$S_1^d(\omega) [\tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega) \overline{s(2\omega)}] \quad S_2^d(\omega) \tilde{g}(\omega)$$

$$S_1(\omega) = S_1^d(\omega) \tilde{h}^0(\omega)$$

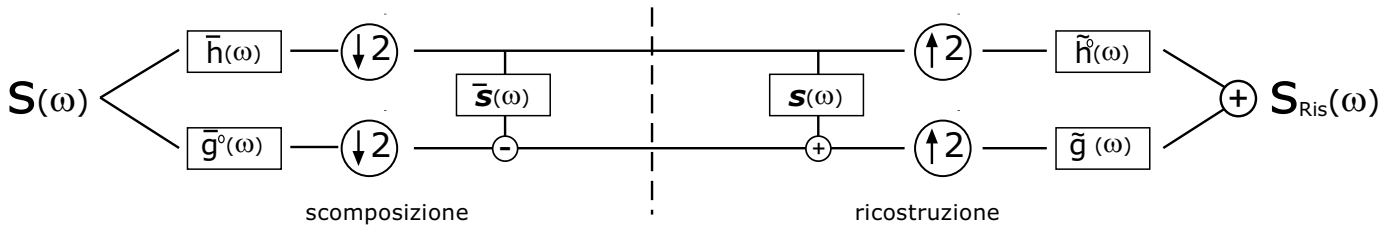
$$S_2(\omega) = [S_2^d(\omega) + S_1^d(\omega) \overline{s(2\omega)}] \tilde{g}(\omega)$$



$$\mathbf{s}(n\omega) \text{ --- } \downarrow N \equiv \downarrow N \text{ --- } \mathbf{s}(\omega)$$

$$\mathbf{s}(n\omega) \text{ --- } \uparrow N \equiv \uparrow N \text{ --- } \mathbf{s}(\omega)$$

Commutatività



- Facile da implementare e comporre
- Il Lifting di un sistema ortonormale ( $\phi = \tilde{\phi}, h = \tilde{h}$ ) rende il sistema biortogonale
- Con un Lifting di  $s(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{64}(e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} - 2)$  si alza a due il numero di momenti nulli delle ondine D4
- Compressioni

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	55.41
Haar con Lifting	9.69
D4	23.23
D4 Lifting	15.40

## Teo SCHEMA DI LIFTING (Sweldens, 1995)

Un Lifting di coefficienti  $\{s_k\}_k$  di  $\{\phi, \tilde{\phi}^0, \psi^0, \tilde{\psi}^0\}$  sistema biortogonale, ne produce un secondo  $\{\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}\}$  ponendo

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in K} g_k^0 \phi(2x - k) - \sum_{k \in K} s_k \phi(x - k)$$

$$\tilde{\phi}(x) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{h}_k^0 \tilde{\phi}(2x - k) - \sum_{k \in K} s_k \tilde{\psi}(x - k)$$

$$\tilde{\psi}(x) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2x - k)$$

- . Il Lifting modifica due filtri  $g, \tilde{h}$  e tre funzioni  
Infatti  $\widehat{\tilde{\psi}}(2\omega) = \widehat{g}(\omega) \widehat{\phi}(\omega)$ ,  $\tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\widehat{h}(\omega + \pi)}$
- . Lifting e Lifting Duali di  $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$  FIR producono basi biortogonali  $L^2(\mathbb{R})$ .

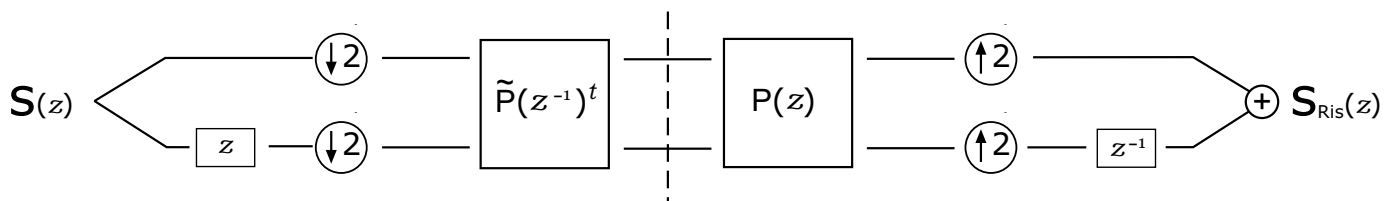
# Rappresentazione Polifase

$$h(z) = \sum_{n=p}^q h_n z^{-n}$$

$$h_e(z) = \sum_k h_{2k} z^{-k} \quad e \quad h_o(z) = \sum_k h_{2k+1} z^{-k}$$

Matrice Polifase

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix}$$



Ricostruzione Perfetta

$$P(z) \tilde{P}(z^{-1})^t = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad P(z) \in GL(2, \mathfrak{R}[z])$$

$$\tilde{P}(z^{-1})^t = P(z)^{-1}$$

Matrici di Lifting

$$L_s(z) = \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{L}_t(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix}$$

Idea di Fattorizzazione

# Fattorizzazione in Lifting

## Teo FATTORIZZAZIONE IN LIFTING

(Daubechies, Sweldens, 1998)

$\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  filtri FIR biortogonali

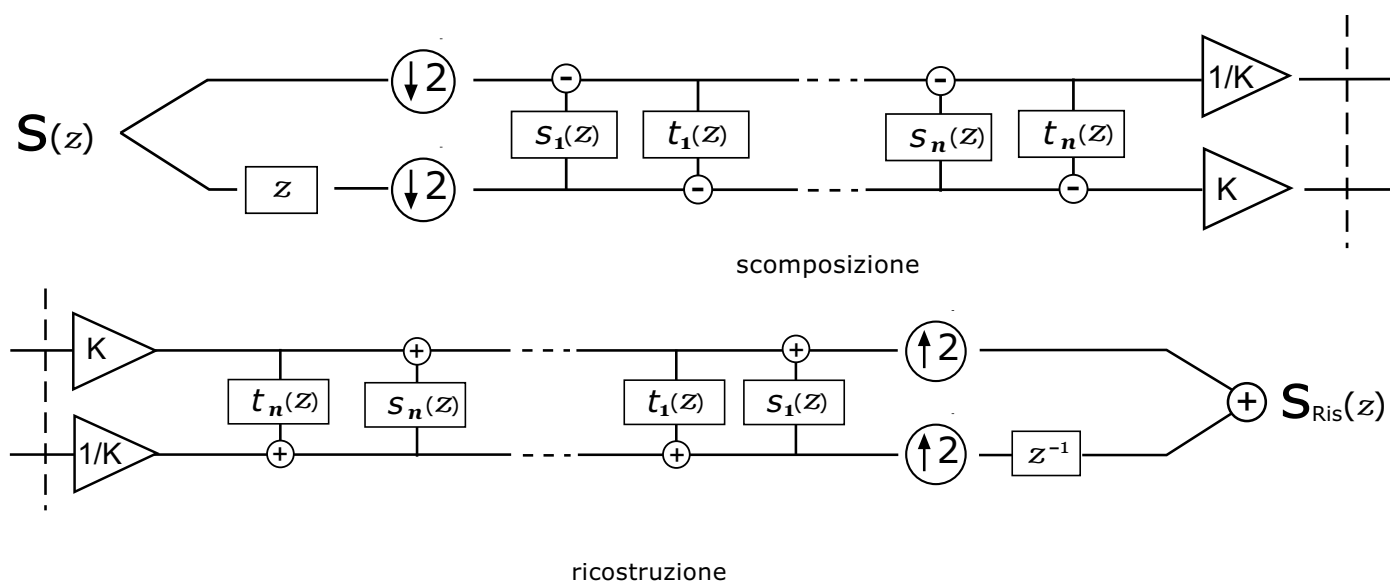
Allora esistono  $n$  polinomi di Lifting e Lifting

Duale  $s_i(\omega), t_i(\omega)$ , che modificano i filtri

$h^0(\omega) = 1, g^0(\omega) = e^{-i\omega}$ , riferito alla Lazy Wa-  
velet, nel sistema  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$

. Abbiamo il più generale schema di codifica in  
sottobande per filtri biortogonali, con  $z = e^{-i\omega}$

. Si nota codifica prodotta dai filtri della Lazy  
Wavelet





# Lifting Opzionale

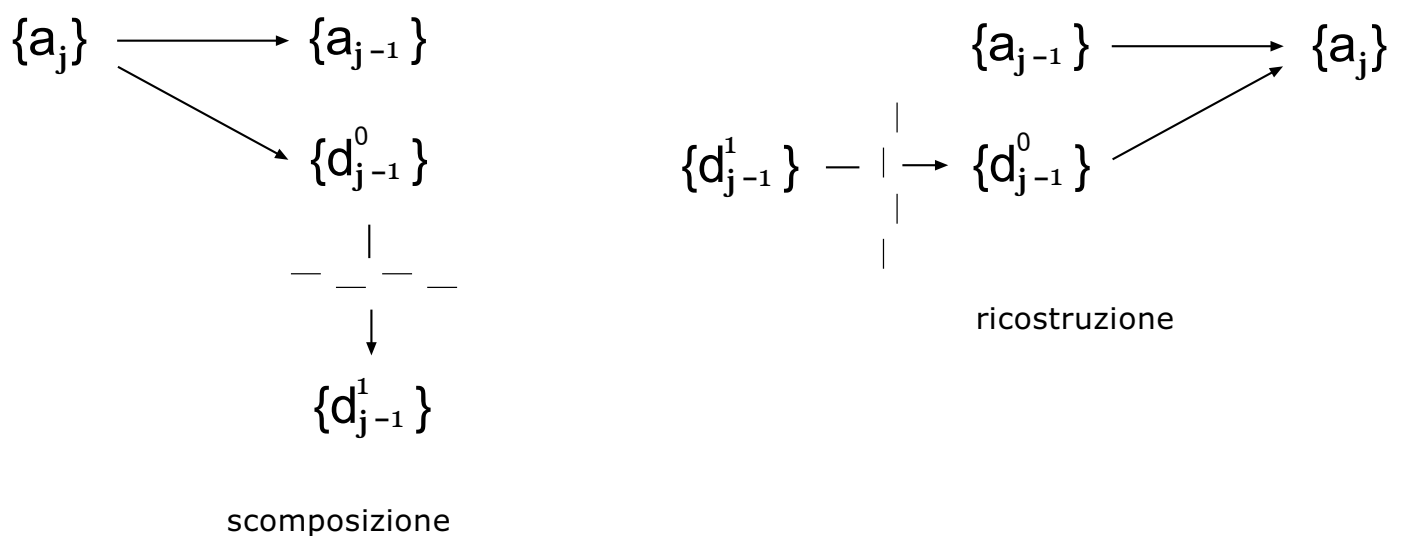
Lifting primale  $\phi^1 = \phi \Rightarrow V_j$  non modificati

$$d_j^1[k] = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad \forall j, k \in Z$$

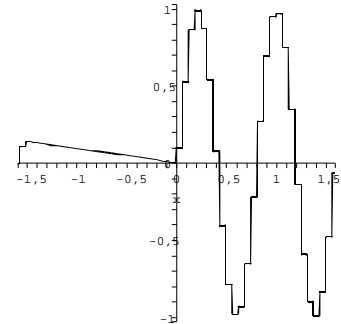
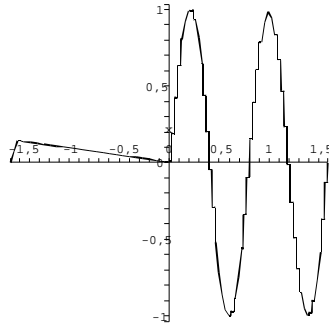
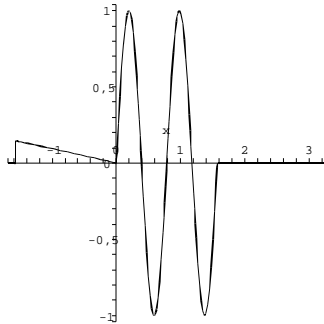
$$= \langle f, \psi_{j,k}^0 \rangle + \sum_{h \in H} s_h \langle f, \phi_{j,h+k} \rangle$$

$$d_j^1[k] = d_j^0[k] + \sum_h s_h a_j[k+h]$$

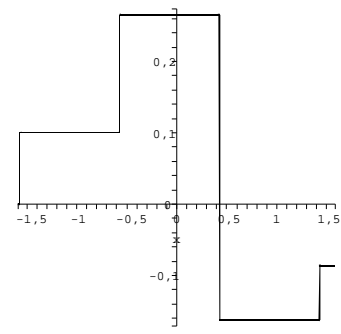
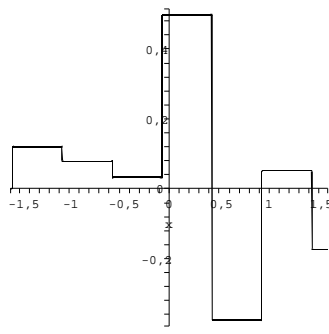
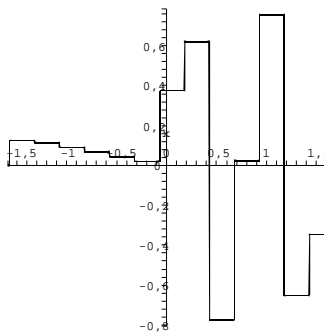
- Sono richiesti solo  $d_j^0[k]$  e  $\{a_j[k]\}_k$
- Sul singolo coefficiente il passaggio di Lifting può non essere vantaggioso
- Si sceglie se trasmettere  $d_j^0[k]$  o  $d_j^1[k]$
- Si ha miglior compressione in alcuni casi



# Esempi

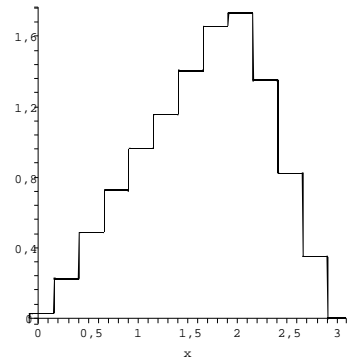
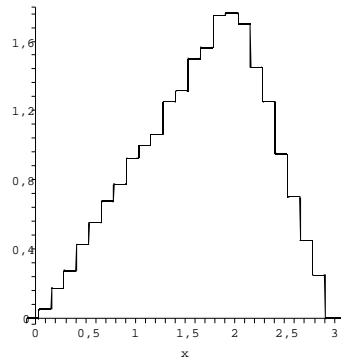
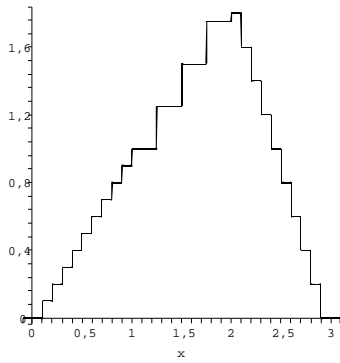


$f, P_5(f), P_4(f)$

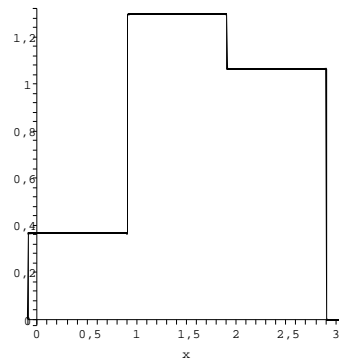
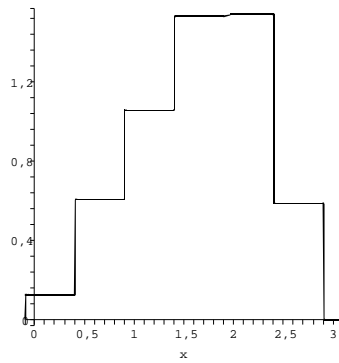


$P_2(f) P_1(f)$  e  $P_0(f)$

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	55.41
Haar con Lifting	9.69
D4	23.23
D4 Lifting	15.40
D4 Lifting Opzionale	10.93

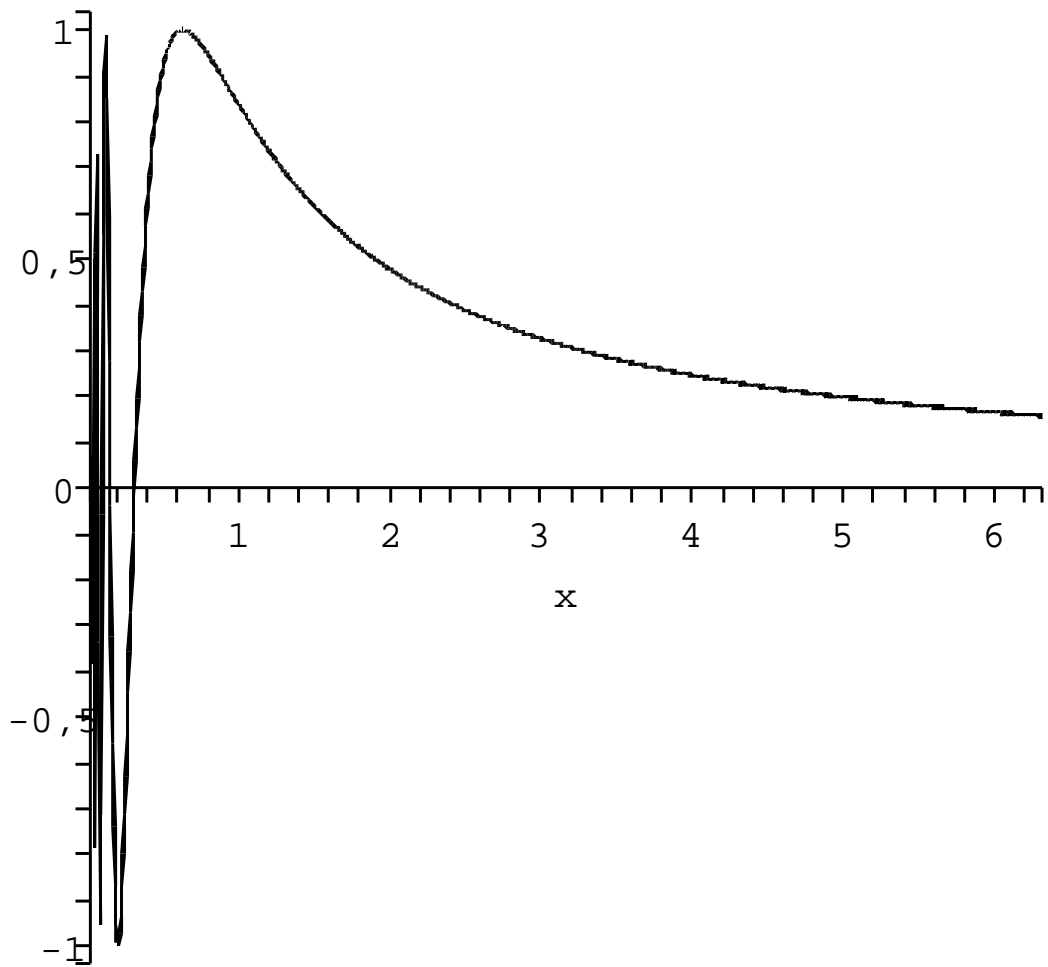


$f, P_3(f), P_2(f)$



$P_1(f) P_0(f)$

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	42.69
Haar con Lifting	87.64
Haar con Lifting Opzionale	42.69
D4	79.77



Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	55.33
Haar con Lifting	9.67
D4	19.35
D4 Lifting	13.27
D4 Lifting Opzionale	10.17

- . Importanza della biortogonalità
- . Altre soluzioni di Biortogonalità, schema di Lifting sui filtri
- . Come si rappresenta in Codifica in Sottobande
- . Osservazioni sulla facilità di implementazione
- . Criteri per la scelta dei filtri
- . Rappresentazione polifase, ricostruzione perfetta
- . Teorema di fattorizzazione